République algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Les Frères Mentouri Constantine

Faculté des sciences exactes

Département de mathématiques

Polycopié de cours

MESURE ET INTÉGRATION II

PROPOSÉ PAR

AOUICHA Lamia

Troisième année licence mathématiques (L.M.D)

2024/2025

Table des matières

Les étudiants de troisième année licence de l'université frères Mentouri de Constantine, a qui s'adresse ce cours, ont déjà étudié la théorie de la mesure et d'intégration, en particulier les espaces mesurés, les inetégrales et pouvoir intervertir passage à la limite et l'intégrale, sous des conditions acceptables, la relation entre l'intégrale de Lebesgue et de Riemann.

Dans ce polycopié, dans le premier chapitre, nous présentons l'espace mesué produit et ces propriétés notamment les Thórèmes de Fubini et quelques applications utiles concernant l'intégrations multiples.

Nous présentons, par la suite, quelques mesure particulières et la décomposition d'une mesure en fonction de deux mesures. Nous donnons une étude détaillée concernant les différents mode de convergences en particulier la convergence presque partout, la convergence en mesure et la relation entre eux.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des séries et de la transformation de Fourier.

Comme ce polycopié est un cours, nous avons pris le parti de démontrer presque tous les résultats de faọn complète. Aprés chaque chapitre, comme application, le cours est illustré par des nombreux exercices.

Chapitre 1

Produit de mesures

1.1 Produit d'espaces mesurables

Définition 1.1. *(Tribu produit)*

Soient $(E_1, \mathcal{F}_1)$ *et* $(E_2, \mathcal{F}_2)$ *deux espaces mesurables, on désigne par* $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ *la tribu sur* $E_1 \times E_2$ *engendrée par les rectangles mesurables, c'est à dire*

$$\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) = \sigma(\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\})$$

Remarque 1.1.

- *L'ensemble des rectangles mesurables*

$$\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

n'est pas une tribu en général.

- *Le produit de la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ par elle même donne la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^2$, on a donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. (Voir dans exercices supplémentaires)*

Proposition 1.1. *La tribu $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ est la plus petite tribu sur $E_1 \times E_2$ qui rende mesurable les deux projections canoniques :*

$$\pi_1 : (E_1 \times E_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \to (E_1, \mathcal{F}_1), \pi_1(x, y) = x$$

$$\pi_2 : (E_1 \times E_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \to (E_2, \mathcal{F}_2), \pi_2(x, y) = y.$$

Preuve 1.1. *π_1 et π_2 sont mesurables car pour tout $A_1 \in \mathcal{F}_1$ et $A_2 \in \mathcal{F}_2$ on a*

$$\pi_1^{-1}(A_1) = \{(x, y) \in E_1 \times E_2 : x \in A_1\} = A_1 \times E_2 \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$$

et

$$\pi_2^{-1}(A_2) = E_1 \times A_2 \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2.$$

Soit $\mathcal{G}$ une tribu sur $E_1 \times E_2$ rendant mesurable les applications π_1 et π_2. Pour tout $A_1 \in \mathcal{F}_1$ et $A_2 \in \mathcal{F}_2$,

$$A_1 \times A_2 = (A_1 \times E_2) \cap (E_1 \times A_2) = \pi_1^{-1}(A_1) \cap \pi_2^{-1}(A_2) \in \mathcal{G},$$

ce qui prouve que $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$, d'où $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{G}$.

Proposition 1.2. *Soit* $(E,\mathcal{M}),(E_1,\mathcal{F}_1)$ *et* $(E_2,\mathcal{F}_2)$ *trois espaces mesurables et soit l'application* $f=(f_1,f_2):(E,\mathcal{M})\rightarrow(E_1\times E_2,\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2)$*, alors* f *est mesurable si et seulement si*

$$f_1:(E,\mathcal{M})\rightarrow(E_1,\mathcal{F}_1),$$

et

$$f_2:(E,\mathcal{M})\rightarrow(E_2,\mathcal{F}_2),$$

sont mesurables.

Preuve 1.2. *Si* f *est mesurable, alors* $f_1=\pi_1\circ f$ *et* $f_2=\pi_2\circ f$ *le sont aussi comme composition de fonctions mesurables.*
Inversement si f_1 *et* f_2 *sont mesurables, alors pour tout* $A_1\in\mathcal{F}_1$ *et* $A_2\in\mathcal{F}_2$ *on a*

$$\begin{aligned}
f^{-1}(A_1\times A_2) &= f^{-1}((A_1\times E_2)\cap(E_1\times A_2))\\
&= f^{-1}(\pi_1^{-1}(A_1)\cap\pi_2^{-1}(A_2))\\
&= f^{-1}(\pi_1^{-1}(A_1))\cap f^{-1}(\pi_2^{-1}(A_2))\\
&= (\pi_1\circ f)^{-1}(A_1)\cap(\pi_2\circ f)^{-1}(A_2)\\
&= f_1^{-1}(A_1)\cap f_2^{-1}(A_2)\in\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Alors comme $\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2=\sigma(\mathcal{F}_1\times\mathcal{F}_2)$*,* f *est mesurable.*

Définition 1.2. *(Les sections)*

Pour toute partie A de $E_1 \times E_2$ et tout $x \in E_1$, on définit la section de A selon x, l'ensemble

$$A_x = \{y \in E_2 : (x, y) \in A\}.$$

De la même manière, on définit la section de A selon y, par l'ensemble

$$A_y = \{x \in E_1 : (x, y) \in A\}.$$

Exemple 1.1.

- *Pour $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, on a*

  $([1,3] \times [-4,-2])_{x=2} = [-4,-2]$, $([1,3] \times [-4,-2])_{x=5} = \emptyset$.

  $([1,3] \times [-4,-2])_{y=-3} = [1,3]$, $([1,3] \times [-4,-2])_{y=0} = \emptyset$.

- *Généralement, soit $A_1 \in \mathcal{F}_1$, $A_2 \in \mathcal{F}_2$ des mesurables de E_1 et de E_2, alors*

$$(A_1 \times A_2)_x = \begin{cases} A_2, & \textit{si } x \in A_1, \\ \emptyset, & \textit{si } x \notin A_1. \end{cases}$$

$$(A_1 \times A_2)_y = \begin{cases} A_1, & \textit{si } y \in A_2, \\ \emptyset, & \textit{si } y \notin A_2. \end{cases}$$

Définition 1.3. *(les applications partielles)*

Soit l'application $f : E_1 \times E_2 \to F$. Pour $x \in E_1, y \in E_2$, on definit les *applications partielles*

$$f_x : E_2 \to F$$
$$f_x(y) = f(x,y)$$

et

$$f_y : E_1 \to F$$
$$f_y(x) = f(x,y).$$

La tribu produit $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ assure la mesurabilité des sections et les applications partielles. En effet, on a

Proposition 1.3. *Soient $(E_1, \mathcal{F}_1)$ et $(E_2, \mathcal{F}_2)$ deux espaces mesurables.*

(a) Soit $A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, alors pour tout $x \in E_1$ et $y \in E_2$, on a $A_x \in \mathcal{F}_2$ et $A_y \in \mathcal{F}_1$.

(b) Si l'application $f : (E_1 \times E_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, alors les applications partielles $f_x : (E_2, \mathcal{F}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $f_y : (E_1, \mathcal{F}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont aussi mesurables.

Preuve 1.3. *(a) D'une part, soit $\mathcal{B} = \{A \subset E_1 \times E_2 : A_x \in \mathcal{F}_2\}$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une tribu sur $E_1 \times E_2$.*

- *Comme $(E_1 \times E_2)_x = E_2 \in \mathcal{F}_2$ pour tout $x \in E_1$, on a $E_1 \times E_2 \in \mathcal{B}$.*

- *Si $A \in \mathcal{B}$ alors pour tout $x \in E_1$ on a $(A^c)_x = (A_x)^c \in \mathcal{F}_2$ et par* *conséquent* $A^c \in \mathcal{B}$.

- *Soit* $(A_n)_{n\geq 1}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{B}$*, pour tout* $x \in E_1$ *on a :*

$$(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n)_x = \cup_{n=1}^{+\infty} (A_n)_x \in \mathcal{F}_2,$$

d'où $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

D'autre part, si $A_1 \in \mathcal{F}_1$ *et* $A_2 \in \mathcal{F}_2$*, alors pour tout* $x \in E_1$,

$$(A_1 \times A_2)_x = \begin{cases} A_2, & si\ x \in A_1, \\ \emptyset, & si\ x \notin A_1. \end{cases}$$

de sorte que $(A_1 \times A_2) \in \mathcal{B}$*. Comme* $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ *est la plus petite tribu sur* $E_1 \times E_2$ *contenant les rectangles mesurables, on en déduit que* $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{B}$*, ce qui prouve que* $A_x \in \mathcal{F}_2$*. De la même manière, on montre que* $A_y \in \mathcal{F}_1$.

(b) Soit $a \in \mathbb{R}$*, comme* $f : (E_1 \times E_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est mesurable, alors* $f^{-1}(]a, +\infty[) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$*. Pour tout* $x \in E_1$*, d'après (a) on obtient*

$$f_x^{-1}(]a, +\infty[) = \big(f^{-1}(]a, +\infty[)\big)_x \in \mathcal{F}_2,$$

et par conséquent $f_x : (E_2, \mathcal{F}_2) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est mesurable. On fait de même avec* f_y.

1.2 Mesure produit

Dans cette section, on va construire une mesure sur l'espace produit $E_1 \times E_2$, on considère dans toute la suite $(E_1, \mathcal{F}_1, m_1)$ et $(E_2, \mathcal{F}_2, m_2)$ deux espaces mesurés avec m_1 et m_2 des mesures $\sigma-$ finies.

Proposition 1.4. *Pour tout $A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, les applications*

$$\begin{aligned} (E_1, \mathcal{F}_1) &\to [0, +\infty] \\ x &\to m_2(A_x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (E_2, \mathcal{F}_2) &\to [0, +\infty] \\ y &\to m_1(A_y) \end{aligned}$$

sont mesurables

Preuve 1.4. *On montre que l'application $x \to m_2(A_x)$ est mesurable et la même démarche s'applique pour la deuxième application.*

*1) **Étape 1 :** On suppose que m_2 est **une mesure finie** et on pose*

$$\mathcal{C} = \{A \in E_1 \times E_2 : x \to m_2(A_x) \text{ est } \mathcal{F}_1 \text{ mesurable}\}$$

et soit

$$\mathcal{P} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

l'ensemble des rectangles mesurables.

(i) *Montrons que $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{P}$.*

On a

$$m_2((A_1 \times A_2)_x) = \begin{cases} m_2(A_2), & si\ x \in A_1, \\ 0, & si\ x \notin A_1. \end{cases}$$

On a alors $m_2((A_1 \times A_2)_x) = m_2(A_2) 1_{A_1}(x)$ qui est mesurable (car $m_2(A_2) < \infty$ et $A_1 \in \mathcal{F}_1$), d'où l'application $x \to m_2(A_x)$ est $\mathcal{F}_1$ mesurable, alors $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$.

(ii) *Montrons que $\mathcal{C}$ contient l'algèbre engendrée par la semi-algèbre $\mathcal{P}$.*

Soit A appartient à l'algèbre engendrée par $\mathcal{P}$, alors $A = \sum_{i=1}^{n} A_j$ telle que $A_j \in \mathcal{P}$ et $A_j \cap A_{j'} = \emptyset$ pour $j \neq j'$, $((A_j = (A_j)_1 \times (A_j)_2)$ d'où

$$A_x = (\sum_{i=1}^{n} A_j)_x = \sum_{i=1}^{n} (A_j)_x,$$

alors

$$m_2(A_x) = \sum_{i=1}^{n} m_2((A_j)_x) = \sum_{i=1}^{n} m_2((A_j)_2) 1_{(A_j)_1}(x).$$

D'aprés la partie (i), on trouve que l'application $x \to m_2(A_x)$ est aussi mesurable, d'où le resultat (ii).

(iii) *Montrons maintenant que $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{C}$, pour cela il suffit de prouver que $\mathcal{C}$ est une classe monotone.*

- $E_1 \times E_2 \in \mathcal{P} \subset \mathcal{C}$.
- *Soit* $A, B \in \mathcal{C}$ *avec* $A \subset B$, *alors* $m_2((B \backslash A)_x) = m_2(B_x \backslash A_x) = m_2(B_x) - m_2(A_x)$ *d'où l'application* $x \to m_2((B \backslash A)_x)$ *est mesurable comme différence de deux applications mesurables.*
- *Si* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{C}$, *telle que* $A_n \subset A_{n+1}$ *pour tout* $n \geq 1$, *alors* $(A_n)_{x_1} \subset (A_{n+1})_x$, *on a donc*

$$m_2((\cup_n A_n)_x) = m_2(\cup_n (A_n)_x) = lim_n m_2((A_n)_x),$$

  d'où l'application $x \to m_2((\cup_n A_n)_x)$ *est mesurable, en tant que limite d'applications mesurables.*

On obtient alors $\mathcal{M}(\mathcal{P}) = \sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ *or* $\mathcal{M}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{C}$ *alors* $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{C}$. *Ce qui prouve le théorème pour le cas fini.*

2) ***Étape 2 :*** *Supposons que* m_2 *est* ***une mesure*** $\sigma-$***finie***, *on a donc* $E_2 = \cup_n B_n$, *avec* $B_n \subset B_{n+1}$ *et* $m_2(B_n) < +\infty$ *pour tout* $n \geq 1$.
La mesure $m_2(F \cap B_n)$ *est finie pour tout* $n \geq 1$ *et* $F \in \mathcal{F}_2$, *alors d'après la partie (1), l'application* $x \to m_2(E_x \cap B_n)$ *est mesurable lorsque* $E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$. *Or par continuité croissante, on a*

$$m_2(F) = lim_n m_2(F \cap B_n),$$

en particulier lorsque $E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, on a

$$m_2(E_x) = lim_n m_2(E_x \cap B_n),$$

d'où l'application $x \to m_2(E_x)$ est mesurable en tant que limite d'applications mesurables.

Proposition 1.5. *Il existe une unique mesure positive, notée $m_1 \otimes m_2$ sur la tribu $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ qui vérifie*

$$\forall A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2, m_1 \otimes m_2(A \times B) = m_1(A)m_2(B).$$

De plus, pour tout $E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$, on a

$$m_1 \otimes m_2(E) = \int_{E_1} m_2(E_x)dm_1 = \int_{E_2} m_1(E_y)dm_2.$$

Preuve 1.5. *D'après la proposition précédente, pour $E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$,*

$$\mu_1(E) = \int_{E_1} m_2(E_x)dm_1$$

et

$$\mu_2 = \int_{E_2} m_1(E_y)dm_2$$

ont un sens car les applications

$$x \to m_2(E_x)$$

et

$$y \to m_1(E_y)$$

sont mesurables.

Montrons maintenant que μ_1 *et* μ_2 *sont des mesures :*

- $\mu_1(\emptyset) = \mu_2(\emptyset) = 0$ *car* $\mu_1(\emptyset) = \int_{E_1} m_2(\emptyset_x)dm_1 = \int_{E_1} m_2(\emptyset)dm_1 = \int_{E_1} 0dm_1 = 0.$
- $\mu_2(\emptyset) = \int_{E_2} m_1(\emptyset_y)dm_2 = \int_{E_2} m_1(\emptyset)dm_2 = \int_{E_2} 0dm_2 = 0.$
- *Soit* (E_n) *une suite d'ensemble deux à deux disjoint d'éléments de* $\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$*, on a*

$$\begin{aligned} \mu_1(\cup_n E_n) &= \int_{E_1} m_2(\cup_n E_n)_x dm_1 \\ &= \int_{E_1} m_2(\cup_n (E_n)_x)dm_1 = \int_{E_1} \sum_n m_2((E_n)_x)dm_1 \\ &= \sum_n \int_{E_1} m_2(E_n)_x dm_1 = \sum_n \mu_1(E_n) \end{aligned}$$

  et cela d'après le théorème de convergence monotone.

- *De la même manière, on obtient*

$$\mu_2(\cup_n E_n) = \sum_n \mu_2(E_n).$$

Alors

$$\mu_1(A \times B) = \int_{E_1} m_2((A \times B)_x)dm_1 = \int_A m_2(B)dm_1 = m_2(B)m_1(A),$$

et de la même façon, on trouve

$$\mu_2(A \times B) = m_1(A)m_2(B).$$

Corollaire 1.1.

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} 1_E(x,y)dm_2(y) \right) dm_1(x) = m_1 \otimes m_2(E) = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} 1_E(x,y)dm_1(x) \right) dm_2(y).$$

pour tout $E \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$.

Preuve 1.6. *Il est évident que pour tout* $(x,y) \in E_1 \times E_2$ *on a*

$$1_{E_x} = 1_E = 1_{E_y}$$

et

$$m_1(E_y) = \int_{E_1} 1_{E_y} dm_1$$

et

$$m_2(E_x) = \int_{E_2} 1_{E_x} dm_2.$$

D'après la proposition précédente, on obtient

$$m_1 \otimes m_2(E) = \int_{E_1} m_2(E_x) dm_1(x) = \int_{E_1} \left(\int_{E_2} 1_E(x,y)dm_2(y) \right) dm_1(x)$$

et

$$m_1 \otimes m_2(E) = \int_{E_2} m_1(E_y) dm_2(y) = \int_{E_2} \left(\int_{E_1} 1_E(x,y) dm_1(x) \right) dm_2(y).$$

1.3 Théorèmes de Fubini

Ces Théorèmes relient l'intégrale sur la mesure produit et les intégrales itérées.

Théorème 1.1. *(Théorème de Fubini)*
Soit $f : (E_1 \times E_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \to [0, +\infty]$ *une application mesurable positive, alors les applications*

$$\phi(x) = \int_{E_2} f_x(y) dm_2(y)$$

et

$$\psi(y) = \int_{E_1} f_y(x) dm_1(x)$$

sont respectivement $\mathcal{F}_1$ *et* $\mathcal{F}_2$ *mesurables, et on a les égalités suivantes*

$$\int_{E_1 \times E_2} f(x,y) d(m_1 \otimes m_2)(x,y) = \int_{E_1} \phi(x) dm_1(x) = \int_{E_2} \psi(y) dm_2(y).$$

Preuve 1.7. *Pour* $f(x,y) = 1_A(x,y)$ *avec* $A \in \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$*, on a :*

$$\phi(x) = \int_{E_2} 1_{A_x}(y)dm_2(y) = m_2(A_x)$$

et

$$\psi(y) = \int_{E_1} 1_{A_y}(x)dm_1(x) = m_1(A_y).$$

D'aprés la proposition précédente, les applications ϕ *et* ψ *sont mesurables , et on a*

$$\begin{aligned}
\int_{E_1\times E_2} 1_A(x,y)d(m_1\otimes m_2)(x,y) &= m_1\otimes m_2(A) \\
&= \int_{E_1} m_2(A_x)dm_1(x) = \int_{E_2} m_1(A_y)dm_2(y) \\
&= \int_{E_1} \phi(x)dm_1(x) = \int_{E_2} \psi(y)dm_2(y).
\end{aligned}$$

La linéarité de l'intégrale permet d'étendre le résultat au cas où f *est simple, le théorème de convergence monotone permet de conclure pour* f *positive.*

On passe maintenant au cas de fonctions intégrables.

Théorème 1.2. *Soit* $f : (E_1 \times E_2, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \to \mathbb{R}$ *une application intégrable par rapport a la mesure* $(m_1 \otimes m_2)$*, alors les applications* ϕ *et* ψ *sont définies respectivement* $m_1.p.p$ *et* $m_2.p.p$ *, elles sont respectivement* m_1 *et* m_2 *intégrable et vérifient la relation*

$$\int_{E_1\times E_2} f(x,y)d(m_1\otimes m_2)(x,y) = \int_{E_1} \phi(x)dm_1(x) = \int_{E_2} \psi(y)dm_2(y).$$

Preuve 1.8. *Si f est intégrable alors*

$$\int_{E_1\times E_2} f^+ d(m_1\otimes m_2) < \infty$$

et

$$\int_{E_1\times E_2} f^- d(m_1\otimes m_2) < \infty.$$

D'après le théorème précédent on a

$$\int_{E_1\times E_2} f^+(x,y) d(m_1\otimes m_2)(x,y) = \int_{E_1}\left(\int_{E_2} f_x^+(y) dm_2(y)\right) dm_1(x) < \infty$$

d'où

$$\int_{E_2} f_x^+(y) dm_2(y) < +\infty, m_1.p.p$$

De même, on montre que $\int_{E_2} f_x^-(y) dm_2(y) < +\infty, m_1.p.p,$ *d'où*

$$\int_{E_2} f_x(y) dm_2(y) < +\infty, m_1.p.p.$$

De la même façon on montre que

$$\int_{E_1} f_y(x) dm_1(x) < +\infty, m_2.p.p.$$

Comme $\int f = \int f^+ - \int f^-$, *on obtient que*

$$\int f(x,y)d(m_1 \otimes m_2)(x,y) = \int \phi(x)dm_1(x).$$

La deuxième égalité se montre de la même manière.

1.4 Exercices

Exercice 1.1. *Soit*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & si\ 0 \leq x \leq 1\ \ et\ 0 \leq y \leq 1, ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0, & si\ x = y = 0. \end{cases}$$

1. Calculer $\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

2. Calculer

$$\int \left(\int f_x(y)d\lambda(y)\right) d\lambda(x)\ \ et\ \int \left(\int f_y(x)d\lambda(x)\right) d\lambda(y).$$

3. L'application f *est elle intégrable par rapport* $\lambda \otimes \lambda$ *? justifier votre réponse.*

Exercice 1.2. *Soient* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et* $(Y, \mathcal{B}, m)$ *des espaces mesurés* σ *finis. On munit* $X \times Y$ *de la tribu produit* $A \otimes B$ *et de la mesure* $\mu \otimes m$. *Soient* $h \in L^2(X \times Y)$ *et* $f \in L^2(X)$. *On note* h_y *l'application partielle de* h *définie par* $x \to h_y(x) = h(x,y)$.

1- Montrer que pour presque tout y *de* Y *l'application* $x \to h_y(x)f(x)$ *est* *intégrable sur X.*

2- *Soit g l'application définie presque partout par $g(y) = \int_X h_y(x)f(x)d\mu(x)$.*

   i) *Montrer que g est mesurable (indication : soit $E \subset Y$ un ensemble de mesure finie, montrer que $f(x)1_E(y) \in L^2(X \times Y)$ ensuite montrer que $g(y)1_E(y)$ est mesurable).*

   ii) *Montrer que g est de carré intégrable et que*

$$\int_Y |g|^2 \leq ||f||_2^2 ||h||_2^2.$$

Exercice 1.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, m)$ un espace mesuré où m est finie et soit f une application mesurable et positive.*

1) *Soit l'ensemble $A = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}^+ / f(x) \geq t\}$. Montrer que $A \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.*

2) *On munit l'espace $(X \times \mathbb{R}^+, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ de la mesure $m \otimes \lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que*

$$\int_X f dm = \int_0^\infty m(f \geq t) d\lambda(t).$$

3) *Soit l'application H de $X \times \mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par*

$$H(x,t) = nt^{n-1} 1_{[t,\infty[}(f(x)).$$

   Montrer que H est mesurable de $(X \times \mathbb{R}^+, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ dans $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$.

4) *Montrer que $\int_X f^n dm = \int_0^\infty nt^{n-1} m(f \geq t) d\lambda(t)$.*

Exercice 1.4. *(Supplémentaire) soient* (E_1, τ), (E_2, τ') *deux espaces topologiques, on note* $\tau \times \tau'$ *la topologie produit sur l'espace* $E_1 \times E_2$.

1) *Montrer que* $\mathcal{B}(E_1 \times E_2) \supset \mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2)$ *où* $\mathcal{B}(E)$ *désigne la tribu borélienne de l'espace topologique* E.

2) *On suppose que toute ouvert de* $\tau \times \tau'$ *s'écrit comme réunion au plus dénombrable de pavés ouvert, montrer qu'on a alors*

$$\mathcal{B}(E_1 \times E_2) = \mathcal{B}(E_1) \otimes \mathcal{B}(E_2).$$

3) *Déduire que* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 1.5. *(Supplémentaire) Soient* a *et* b *deux réels strictement positifs, telle que* $a < b$. *En considèrant l'intégrale*

$$\int_{[a,b]} \int_{[0,1]} x^y d\lambda(x) d\lambda(y),$$

montrer que

$$\int_{[0,1]} \frac{x^b - x^a}{\log x} d\lambda(x) = \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right).$$

Chapitre 2

Dérivée de Radon Nycodim

La dérivée de Radon Nycodim permet exprimer une mesure a l'aide d'une autre lorsqu'il existe une relation d'absolue continuité entre elles. Elle généralise la notion de densité et joue un rôle central en théorie de la mesure, en probabilité et en statistique.

2.1 Mesures particulieres

Définition 2.1. *La mesure m est dite* ***absolument continue*** *par rapport a la mesure l si*

$$\forall B \in \mathcal{F}, l(B) = 0 \Longrightarrow m(B) = 0.$$

On écrit $m \ll l$.

Définition 2.2. *Soit $A \in \mathcal{F}$, la mesure m est dite* ***concentrée*** *sur A si*

$$\forall B \in \mathcal{F}, m(B) = m(B \cap A).$$

On dit que A porte la mesure m.

Définition 2.3. *Soient m et l deux mesure sur $(E, \mathcal{F})$ telles que m est concentrée sur A et l concentrée sur B. On dit que m et l sont* ***singulière*** *si $A \cap B = \emptyset$, on écrit $m \perp l$ et on a*

$$m(B) = l(A) = 0.$$

Remarque 2.1. *m est concentrée sur A si et seulement si toute partie disjointe de A est négligeable.*
En effet, On suppose que m est une mesure concentrée sur A et $B \subset E$ telle que $B \cap A = \emptyset$, alors $B \subset A^c$ et $m(A^c) = m(A^c \cap A) = 0$, d'où $m(B) = 0$.
Inversement, on a $m(B) = m(B \cap A) + m(B \cap A^c)$ or $B \cap A^c$ est négligeable donc $m(B) = m(B \cap A)$.

Exemple 2.1.

1. *La mesure de Dirac δ_x et la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ sont singulières car δ_x est concentrée sur $\{x\}$ et λ est concentrée sur $\mathbb{R} \backslash \{x\}$.*
2. *Soit $f \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{F})$, la mesure m définie par $m(A) = \int_A f dl$, pour tout $A \in \mathcal{F}$, est absolument continue par rapport à la mesure l.*

Proposition 2.1.

1. *$l \ll m$ et $n \ll m \Longrightarrow l + n \ll m$.*

2. $l \ll m$ et $m \ll n \Longrightarrow l \ll n$.

3. $l \ll m$ et $n \perp m \Longrightarrow l \perp n$.

4. $l \ll m$ et $l \perp m \Longrightarrow l = 0$.

5. $l \perp m$ et $n \perp m \Longrightarrow l + n \perp m$.

Preuve 2.1. 1. *Èvidente.*

2. *Èvidente.*

3. *Soit n la mesure qui est portée par A alors $m(A) = 0$ d'où $l(A) = 0$, l est donc concentrée sur A^c, alors $l \perp n$.*

4. *On a selon 3. $l \perp l$, d'où $l = 0$.*

5. *Il existe A portant l et B_1 portant m avec $A \cap B_1 = \emptyset$ et il existe C portant n et B_2 portant m avec $C \cap B_2 = \emptyset$ alors $l + n$ est portée par $A \cup C$ et m est portée par $B_1 \cap B_2$ avec $(A \cup C) \cap (B_1 \cap B_2) \subset (A \cap B_1) \cup (C \cap B_2) = \emptyset$.*

2.2 Décomposition d'une mesure

Théorème 2.1. *(Théorème de Radon Nykodim-Lebesgue)*
Soient m et l deux mesures σ-finies sur $(E, \mathcal{F})$.

1. *Si $l \ll m$ alors il existe une fonction h mesurable et positive sur E telle que*

$$l(A) = \int_A h dm, \forall A \in \mathcal{F}$$

h est définie d'une manière unique m.p.p., h est la dérivée de Radon Nykodim de l par rapport à m, on l'écrit $\frac{dl}{dm}$.

2. *Il existe un unique couple de mesures (l_1, l_2) sur $(E, \mathcal{F})$ telle que*

$$l = l_1 + l_2, \text{ où } (l_1 \ll m) \text{ et } (l_2 \perp m),$$

c'est la décomposition de Lebesgue.

Preuve 2.2. • *Étude de l'existence*

1. *Le cas fini*

   a) *Supposons que l et m sont des mesures finies, alors $n = l + m$ est une mesure finie, si $f \in L^2(E, B, n)$ cela implique que $f \in L^1(E, \mathcal{F}, n)$. Comme*

$$\int |f| dl \leq \int |f| dn$$

alors

$$f \in L^1(E, \mathcal{F}, l)$$

et d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz

$$|\int f dl| \leq \int |f| dn \leq ||f||_2 \sqrt{n(E)}.$$

Ce qui prouve que l'application $f \to \int f dl$ est une forme linéaire et continue sur $L^2(E, \mathcal{F}, n)$, qui est un espace de Hilbert.

Il existe donc une application g de $L^2(E,\mathcal{F},n)$ telle que pour tout f de

$$L^2(E,\mathcal{F},n), \int fdl = \int gfdn.$$

De même, on peut trouver une application k de $L^2(E,\mathcal{F},n)$ telle que

$$\forall f \in L^2(E,\mathcal{F},n), \int fdm = \int kfdn. \tag{2.1}$$

Pour $f = 1_B$ telle que $B \in \mathcal{F}$, on a $f \in L^2(E,\mathcal{F},n)$ et

$$l(B) = \int_B gdn, \tag{2.2}$$

$$m(B) = \int_B kdn,$$

et $\forall B, \int_B dn = n(B) = \int_B (g+k)dn$, cela implique que $g \geq 0, k \geq 0$, car m est une mesure positive et l'unicité donne $g + k = 1, n.p.p.$ d'où $0 \leq k \leq 1, n.p.p.$
Soit $A = k^{-1}(]0,1[)$ alors $A^c = k^{-1}(\{0\})$, on a

$$m(B) = \int_B kdn = \int_{B\cap A} kdn + \int_{B\cap A^c} kdn = m(B\cap A),$$

m est donc portée par A. Posons $\forall B \in \mathcal{F}$ $l'(B) = l(B\cap A)$ et $l''(B) = l(B\cap A^c)$. Il est clair que $l = l' + l''$ et $l'' \perp m$ (l" est portée par A^c et m est portée par A). Il reste à vérifier que

$l' \ll m$, pour cela posons

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{k(x)}, & si\ x \in A \\ \\ 0, & si\ x \notin A^c. \end{cases}$$

D'après l'équation (2.1), on a

$$\int_B hdm = \int_{B \cap A} \frac{g(x)}{k(x)} dm = \int_{B \cap A} gdn$$

et l'équation (2.2), donne

$$\int_B hdm = l(B \cap A) = l'(B),$$

ce qui montre que $l' \ll m$.

b) *En appliquant la décomposition que nous venons de trouver et son unicité, nous déduisons que si $l \ll m$, le couple $(l, 0)$ est une décomposition de l et il existe h telle que*

$$\forall B \in \mathcal{F}, \int_B hdm = l(B).$$

2 . Le cas σ fini

a) *Soit (En) une partition de E avec $E = \cup E_n$ et $\forall n, m(E_n) < \infty$ et $l(E_n) < \infty$. En considèrant les mesures traces de m et l à E_n et en utilisant le cas des mesures finies, pour tout n il existe*

$A_n \subset En$ *et une application* h_n *tels que* $h_n : E_n[0,+\infty]$ *avec* $m(En \cap A_n^c) = 0$ *et* $\forall B \in \mathcal{F} l(B \cap A_n) = \int_{B \cap A_n} h_n dm$. *En posant* $A = \cup_n A_n$ *on a* $E \cap A^c = \cup_n (E \cap A_n^c)$ *d'où* $m(E_n \cap A^c) = 0$ *et en posant pour tout* n, h_n *la restriction de* h *à* E_n *alors* h *est une application positive et mesurable. Les ensembles* (A_n) *étant disjoints, on a* $l(B \cap A) = l(\cup_n (B \cap An)) = \sum_n l(B \cap An) = \sum_n \int_{(B \cap An)} h_n dm = \int_{(B \cap An)} \sum_n h_n dm = \int_E hdm$ *d'où*

$$l(B) = l(B \cap A) + l(B \cap A^c) = l'(B) + l''(B),$$

avec $l'(B) = \int_B hdm$ $l' \ll m$ *et* $l''(B) = l(B \cap A^c)$ *donc* l'' *est portée par* A^c *avec* $m(A^c) = 0$, *d'où* $l'' \perp m$.

b) Decoule immédiatement de a. comme pour les mesures finies.

- *Etude de l'unicite*

1. *du couple*

   Soient (l', l'') *et* (μ', μ'') *deux décompositions de la mesure* l. *La mesure* l'' *est concentrée sur l'ensemble* L *qui est* m *négligeable et la mesure* μ'' *est concentrée sur l'ensemble* N *qui est* m *négligeable.* l *et* μ *sont donc concentrées sur* $M = L \cup N$ *qui est* m *négligeable. La propriété 3) entraine que* $l''(B) = l''(B \cap M) = l(B \cap M) = \mu''(B \cap M) = \mu''(B)$, $l'(B) = l'(B \cap M^c) = l(B \cap M^c) = \mu'(B \cap M^c) = \mu'(B)$.

2. De h Soient h et h deux applications mesurables vérifiant

$$\forall A \in \mathcal{F}, l(A) = \int_A h dm = \int_A h' dm$$

montrons que $h = h', m.p.p$ *Soit* $B = \{x \in E | h(x) - h'(x) > 0\}$. l *étant* σ *finie, il existe une suite d'ensembles mesurables* (E_n) *telle que* $E = \cup_n E_n$ *et* $\forall n, l(E_n) < \infty$, *d'où*

$$l(E_n \cap B) = \int_{E_n \cap B} h dm = \int_{E_n \cap B} h' dm.$$

Ces deux intégrales étant finies, on a $\int_{E_n \cap B} h dm - \int_{E_n \cap B} h' dm = 0$ *implique que* $\int_{E_n \cap B} h - h' dm = 0 (h - h') 1_{E_n \cap B} = 0 m.p.p$ *or* $h - h' > 0$ *sur* B, *d'où* $m(B \cap E_n) = 0$ $m(B) = m(\cup_n (B \cap E_n)) \sum m(B \cap E_n) = 0$. *De la même manière, on montre que* $m\{x / h - h' < 0\} = 0$ *, donc* $h = h', m.p.p.$

2.3 Exercices

Exercice 2.1. *Soient* $(E, \mathcal{B}, m)$ *un espace mesuré et* A *un ensemble mesurable. On définit sur* $\mathcal{B}$ *la mesure* m_A *par* $m_A(B) = m(A \cap B)$.

1) *Montrer que la mesure* m_A *est absolument continue par rapport à* m *et calculer* $\frac{dm_A}{dm}$.

2) Soit $D \in \mathcal{B}$, montrer que

$$m_A \ll m_D \Leftrightarrow m(A \backslash D) = 0.$$

Exercice 2.2. *Soient l et m deux mesures sur $(E, \mathcal{B})$ et soit $\mathcal{R}$ la relation suivante.*

$$\mathcal{R} : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall B \in \mathcal{B}, l(B) < \delta \Longrightarrow m(B) < \epsilon.$$

1) Montrer que si $\mathcal{R}$ est verifiée alors $m \ll l$.

2) montrer que l'implication précédente devient une équivalence si la mesure m est finie.

Exercice 2.3. *Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace mesuré et f une application mesurable et positive sur X, on pose*

$$\forall A \in \mathcal{B}, l(A) = \int_A f dm.$$

1) Monter que la mesure l est absolument continue par rapport à la mesure m.

2) Soit ϕ une application mesurable et positive sur X, montrer que

$$\int_X \phi dl = \int_X \phi f dm.$$

3) Soit $A \in \mathcal{B}$, montrer que

$$l(A) = 0 \Leftrightarrow m\{\{f \neq 0\} \cap A\} = 0.$$

4) Soit μ une mesure sur $(X, \mathcal{B})$ tel que $m \ll \mu$. Montrer que $l \ll \mu$ et

$$\frac{dl}{d\mu} = f\frac{dm}{d\mu}, \mu p.p$$

On pose $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0.

i) Existe t-il une fonction mesurable g telle que

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \delta_0(A) = \int_A g d\lambda.$$

ii) La mesure de Lebesgue est elle absolument continue par rapport à la mesure de Dirac ?

Exercice 2.4. *Soient α, δ, μ et p des mesures σ-finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et m une mesure sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ telle que :*
$\alpha \ll \mu$ *et* $\frac{d\alpha}{d\mu}(x) = e^{-L(x)}$,
$\delta \ll P$ *et* $\frac{d\delta}{dP}(y) = e^{-M(y)}$,
$m \ll \alpha \otimes \delta$ *et* $\frac{dm}{d(\alpha\otimes\delta)}(x, y) = e^{xy}$.
Montrer que $m \ll (\mu \otimes P)$ et calculer $\frac{dm}{d(\mu\otimes P)}$.

Exercice 2.5. *Soit $(X, \mathcal{B}, m)$ un espace mesuré σ-fini, ν et μ deux mesures* *positives.*

1) Montrer que pour ν *σ-finie, si on a* $\mu \ll \nu$ *et* $\nu \ll \delta$ *alors* $\mu \ll \delta$ *et*

$$\frac{d\mu}{d\delta} = \frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{d\delta}, \delta.p.p.$$

2) Montrer que si on a $\mu \ll \delta$ *et* $\nu \ll \delta$ *alors*

$$\frac{d(\mu+\nu)}{d\delta} = \frac{d\mu}{d\delta} + \frac{d\nu}{d\delta}, \delta.p.p$$

3) Montrer que pour ν *,σ-finie, si* δ *et* ν *sont équivalentes alors*

$$\frac{d\delta}{d\nu} = 1/\frac{d\nu}{d\delta}, \delta.p.p.$$

Chapitre 3

Différents modes de convergence

Dans tout ce chapitre on se fixe un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, m)$.

3.1 Types de convergence déjà rencontrés.

3.1.1 Convergence uniforme.

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Autrement dit

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

On note $f_n \xrightarrow{U} f$.

3.1.2 Convergence simple

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f si

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \forall n \geq n_0, : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Autrement dit

$$\forall x \in X, \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

On note $f_n \xrightarrow{S} f$.

3.1.3 Convergence $m - p.p$

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $m - p.p$ vers f si

$$\exists N \in \mathcal{N}_m, \forall x \in N^c : \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Autrement dit

$$\exists N \in \mathcal{N}_m : \lim_{n\to\infty} f_n(x)_{/N^c} = f(x)_{/N^c}.$$

On note $f_n \xrightarrow{m-p.p} f$.

3.1.4 Convergence dans L^p, $1 \leq p < +\infty$

Lorsque f et f_n sont dans , on dit que (f_n) converge vers f dans si $\lim_{n\to\infty} f_n - f = 0$

3.1.5 Convergence dans L^∞

Lorsque f et f_n sont dans L^∞, on dit que (f_n) converge vers f dans L^∞ si $\lim_{n\to\infty} f_n - f = 0$ Autrement dit

$$\exists N \in \mathcal{N}_m : \lim_{n\to\infty} f_n(x)_{/N^c} = f(x)_{/N^c}.$$

Proposition 3.1. *Supposons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit dans L^p avec $1 \leq p < +\infty$ et que $m(E) < +\infty$. Si $f_n \xrightarrow{U} f$ alors $f \in L^p$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$.*

Preuve 3.1. *Soit $\epsilon > 0$ et soit n_0 tel que $n \leq n_0$ alors*

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{d}$$

où $d = max(1, m(E)^{\frac{1}{p}})$. Pour tout $n \leq n_0$, on a

$$\begin{aligned} ||f_n - f||_p &= (m(|f_n - f|^p))^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(m(\frac{\epsilon^p}{d^p} 1_E) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{\epsilon}{d} m(E)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Comme $||f||_p \leq ||f - f_{n_0}||_p + ||f_{n_0}||_p < +\infty$ d'où $f \in L^p$ et $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Remarque 3.1. *On ne peut pas omettre la condition* $m(E) < +\infty$. *en effet soit* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *un espace mesuré, soit* $f_n = \frac{1}{n}1_{[0,n]}$. *Il est évident que* $f_n \xrightarrow{\mathcal{U}} 0$ *et* $\forall n, f_n \in L^1$ *mais* f_n *ne converge pas vers* 0 *dans* L^p.

La proposition suivante est une généralisation du théorème de convergence dominée .

Proposition 3.2. *Supposons que la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit dans* $L^p, p \in [1, +\infty[$, *et que* $f_n \xrightarrow{m.p.p} f$ *et qu'il existe une fonction* g *positive de* L^p *tel que*

$$\forall n, |f_n| \leq g, m.p.p$$

alors $f \in L_p$ *et* $f_n \xrightarrow{L^p} f$.

Preuve 3.2. *Les hypothèses* $\forall n, |f_n| \leq g$ *m.p.p et* $f_n \xrightarrow{m.p.p} f$ *impliquent* $|f| \leq g$ *m.p.p. Il s'en suit que*

$$||f||_p \leq ||g||_p < +\infty$$

et donc $f \in L^p$.

On a pour tout n,

$$|f - f_n| \leq |f| + |f_n|$$

et donc pour tout n,

$$|f - f_n|^p \leq (2g)^p, m.p.p.$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty} |f - f_n|^p = 0, m.p.p.$$

Comme pour tout n, $|f - f_n|^p \in L^1$ et $(2g)^p \in L^1$, le théorème de la convergence dominée entraine que

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f - f_n|^p dm = 0$$

et donc

$$f_n \xrightarrow{L^p} f.$$

3.2 Convergence en mesure

On dit que le suite d'applications mesurables (f_n) converge en mesure vers l'application mesurable f, si

$$\forall \delta > 0, \lim m(\{|f_n - f| \geq \delta\}) = 0.$$

On écrit $f_n \xrightarrow{m} f$.

Proposition 3.3. *Soit $p \in [1, +\infty]$. Si $f_n \xrightarrow{L^p} f$ alors $f_n \xrightarrow{m} f$.*

Preuve 3.3. *Posons* $E_n = \{|f_n - f| \geq \delta\}$, *tel que* $\delta > 0$. *On a alors*

$$\begin{aligned}\int |f_n - f|^p dm &\geq \int_{E_n} |f_n - f|^p dm \\ &\geq \int_{E_n} \delta^p dm \geq \delta^p m(E_n).\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_p = 0$, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} m(E_n) = 0.$$

ii) Si $p = +\infty$

Proposition 3.4. *Supposons que* $f_n \xrightarrow{m} f$, *alors il existe une sous suite* (f_{n_k}) *telle que* $f_{n_k} \xrightarrow{m.p.p.} f$.

Preuve 3.4. *Observons que l'on peut construire une suite d'entiers* n_k *strictement croissante telle que pour tout* k,

$$m\left(\{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{2^k}\}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Montrons que $f_{n_k} \xrightarrow{m.p.p.} f$.

Posons $A_k = \{|f_{n_k} - f| \geq \frac{1}{2^k}\}$, *on a*

$$\overline{\lim} A_k = \cap_k \cup_{j\geq k} Aj \in \mathcal{F}$$

et

$$m(\overline{\lim} A_k) = 0.$$

En effet
$$\sum_{k=1}^{+\infty} m(A_k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$$
et donc
$$m(\cup_{j\geq k} A_j) \leq \sum_{j\geq k} m(A_j) \xrightarrow[k+\infty]{} 0$$
Soit $x \notin \overline{\lim} A_k$*. On a* $\exists k_0, \forall k \geq k_0, x \notin A_k$ *et donc*
$$\forall k \geq k_0, |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k}.$$
Il s'en suit que $\lim_{n_k \to \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$*, d'où* $f_{n_k} \xrightarrow{m.p.p.} f$*.*

3.3 Convergence m presque uniforme

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge m presque uniformément vers f si
$$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathcal{F}, m(A^c) < \epsilon$$
et $f_{n_{|A}} \xrightarrow{U} f_{|A}$. On écrit alors $f_n \xrightarrow{m.p.u} f$.
On a évidemment $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}_\infty} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{m.p.u} f$.

Proposition 3.5. *Si* $f_n \xrightarrow{m.p.u} f$*, alors* $f_n \xrightarrow{m.p.p} f$*.*

Preuve 3.5. *Soit* $A_k \in \mathcal{F}$ *tel que* $m(A_k) < \frac{1}{k}$ *et* $f_{n_{|A_k^c}} \xrightarrow{U} f_{|A_k^c}$*. Posons* $N = \cap A_k$*. Il est claire que* $m(N) = 0$ *et si* $x \notin N$*, comme il existe* k *tel quex* $\in A_k^c$*, on a* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*. On en conclut que* $f_n \xrightarrow{m.p.p} f$*.*

Dans le cas où les fonctions sont mesurables et $m(E) < +\infty$, on a la réciproque

Proposition 3.6. *(Théorème d'Egoroff) Si $m(E) < +\infty$ et si les fonctions f_n et f sont mesurables, on a $f_n \xrightarrow{m-p.p} f$, implique que $f_n \xrightarrow{m.p.u} f$.*

Preuve 3.6. *Elle résulte de et du proposition suivante*

Proposition 3.7. *Si $m(E) < +\infty$ et si les fonctions f_n et f sont mesurables, alors $f_n \xrightarrow{m.p.u} f$, alors $\forall \alpha > 0 \lim_{n\to\infty} m\left(\cup_{m=n}^{\infty}\{|f_m - f| \geq \alpha\}\right) = 0$.*

Preuve 3.7. *Posons pour tout $\alpha > 0$ et*

$$E_n(\alpha) = \cup_{m=n}^{+\infty}\{|f_m - f| \geq \alpha\}.$$

La condition $\forall \alpha > 0, \lim_{n\to+\infty} m\left(E_n(\alpha)\right) = 0$ équivaut à $\lim_{n\to\infty} m\left(E_n(\frac{1}{k})\right) = 0$. On a pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned}
f_n \text{ ne converge pas vers} f \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0, \forall n, \exists m \geq n, |f_m - f| \geq \epsilon \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0, x \in \cap_{n=0}^{+\infty} E_n(\epsilon) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \cup_{\epsilon>0} \cap_{n=0}^{+\infty} E_n(\epsilon) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \cup_{k=1}^{+\infty} \cap_{n=0}^{+\infty} E_n(\frac{1}{k}).
\end{aligned}$$

On a donc

$$\{x / f_n \text{ ne converge pas vers} f\} = \cup_{k=1}^{+\infty} \cap_{n=0}^{+\infty} E_n(\frac{1}{k}).$$

Comme $E_n(\frac{1}{k}) \downarrow \cap_n E_n(\frac{1}{k})$ *et comme* $m(E) < +\infty$, *on a* $m(E_n(\frac{1}{k})) \downarrow m(\cap_n E_n(\frac{1}{k})$.
Il vient :

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{m-p.p.} f &\Leftrightarrow m(\{x/f_n \text{ ne converge pas vers} f\}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \geq 1, m(\cap_{n=0}^{+\infty} E_n(\frac{1}{k})) \\ &\Leftrightarrow \forall k1 \geq 1, \lim_{n\to\infty} m\left(E_n(\frac{1}{k})\right) = 0. \end{aligned}$$

Proposition 3.8. *Si* $m(E) < +\infty$, $f_n \xrightarrow{m-p.p.} f$, *alors* $f_n \xrightarrow{m} f$.

3.4 Exercices

Exercice 3.1. *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de fonctions définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } 0 \leq x \leq n, \\ 0, & \text{si } x > n. \end{cases}$$

1) montrer que f_n *converge uniformément vers* f.

2) la suite (f_n) *converge t'elle dans* $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ *? Pourquoi ?*

Exercice 3.2. *Soit l'espace mesuré* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$. *Etudier les modes de convergence des suites* $(g_{s,n})_{n\geq 1}$ *définies par, pour tout* $n \geq 1$ *et tout* $s \in [0, +\infty]$,

$$g_{s,n} = n^{-\frac{1}{s}} 1_{[0,n]}$$

(avec la convention que $\frac{1}{+\infty} = 0$ *et* $\frac{1}{0} = +\infty$*).*

Exercice 3.3. *On muni* $\mathbb{R}$ *de la mesure de Lebesgue. Etudier pour toutes les suites suivantes la convergence dans* $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$*, en mesure et presque partout.*

1) $f_n = 1_{[0,\frac{1}{n}]}$,

2) $f_n = n1_{[0,\frac{1}{n}]}$,

3) $f_n = 1_{[n,n+1]}$.

Exercice 3.4. *Soit l'espace mesuré* $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$*, et la suite d'applications numériques* $(f_n)_{n\geq 1}$ *définies pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par*

$$f_n = n1_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}.$$

1. *Montrer que* $f_n \xrightarrow{\lambda.p.p} f$ *et* $f_n \xrightarrow{\lambda} f$.
2. *Montrer que* f_n *ne converge pas vers* f *dans* $L^p\big([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda\big)$ *tel que* $p \in [1, \infty]$.

Exercice 3.5. *Soit* μ *une mesure finie sur* $(E, \mathcal{B})$ *et soient* f *et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *des applications mesurables de* E *dans* $\mathbb{R}$ *telles que* $f_n \xrightarrow{m} f$.

Soit g *une application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

1) Supposons que g *est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$*. Montrer que l'application* $g \circ f_n$ *converge en mesure vers* $g \circ f$.

2) Supposons que g *est seulement continue sur* $\mathbb{R}$.

a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $\delta > 0$*, il existe* $\eta \in]0,1[$ *tel que pour* *tout entier naturel n, on ait*

$$\{|g \circ f_n - g \circ f| \geq \delta\} \subseteq \{f_n - f \geq \eta\} \cup \{|f| > k\}.$$

b) En déduire que $g \circ f_n$ converge en mesure vers $g \circ f$.

Exercice 3.6. *Soit $(E, \mathcal{B}, m)$ un espace mesuré fini.*

1) Vérifier que pour tout $\delta > 0$ et tout n,

$$m\left(|f - g| > \delta\right) \leq m\left(|f_n - f| > \frac{\delta}{2}\right) + m\left(|f_n - g| > \frac{\delta}{2}\right).$$

2) Montrer que si $f_n \xrightarrow{m} f$ et $f_n \xrightarrow{m} g$ alors $f = g$ m.p.p.

3) Inversement, montrer que si $f_n \xrightarrow{m} f$ et si g est une application mesurable finie avec $f = g$ m.p.p. alors $f_n \xrightarrow{m} g$.

Chapitre 4

Éléments d'analyse de Fourier

L'étude des fonctions périodiques conduit naturellement à la recherche de représentations analytiques adaptées. Les séries de Fourier constituent une réponse a ce problème, sous quelles conditions en adaptant une écriture de ces fonctions comme une somme infinie de fonction trigonométriques.

4.1 Série trigonométrique

Définition 4.1. *On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions de la forme*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kwx) + b_k \sin(kwx))$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *et* $w > 0$.

4.2 Calcul des coefficients d'une série trigonométrique

4.2.1 Calcul de a_0

On suppose que la série trigonométrique converge uniformément vers $S(x)$ et intégrable sur $[a, a+T]$, on aura

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} S(x)dx &= \int_a^{a+T} a_0 dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^{a+T}\left(a_k\cos(nwx) + b_k\sin(nwx)\right),\\ &= \int_a^{a+T} a_0 dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_a^{a+T}\cos(nwx)dx + b_k\int_a^{a+T}\sin(nwx)dx\right].\end{aligned}$$

Comme $w = \frac{2\pi}{T}$, pour tout $n \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T}\cos(nwx)dx &= \left[\frac{T}{2\pi n}\sin(n\frac{2\pi}{T}x)\right]_a^{a+T}\\ &= \frac{T}{2\pi n}\left[\sin(n\frac{2\pi}{T}(a+T)) - \sin(n\frac{2\pi}{T}a)\right]\\ &= \frac{T}{2\pi n}\left[\sin(n\frac{2\pi}{T}a) - \sin(n\frac{2\pi}{T}a)\right]\\ &= 0,\end{aligned}$$

de la même façon, pour tout $n \geq 1$ on montre que

$$\int_a^{a+T}\sin(nwx)dx = 0$$

de plus

$$\int_a^{a+T} a_0 dx = Ta_0.$$

On en déduit que

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} S(x)dx.$$

4.2.2 Calcul de a_n et b_n

On a

$$S(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kwx) + b_k \sin(kwx)$$

alors

$$S(x)\cos(nwx) = a_0 \cos(nwx)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(kwx) cos(nwx) + b_k \sin(kwx) cos(nwx)\right]$$

et

$$S(x)\sin(nwx) = a_0 \sin(nwx)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos(kwx)\sin(nwx) + b_k \sin(kwx)\sin(nwx)\right].$$

D'après la convergence uniforme, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} S(x)\cos(nwx)dx &= a_0\int_a^{a+T}\cos(nwx)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_a^{a+T}\cos(kwx)cos(nwx)dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int \sin(kwx)cos(nwx)dx,\end{aligned}$$

$$\int_a^{a+T} S(x)\sin(nwx)dx = a_0\int_a^{a+T}\sin(nwx) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\int_a^{a+T}\cos(kwx)\sin(nwx)dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\int_a^{a+T}\sin(kwx)\sin(nwx),$$

or

$$\int_a^{a+T}\cos(kwx)\cos(nwx)dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq k,\\ \frac{T}{2}, & \text{si } n = k.\end{cases}$$

$$\int_a^{a+T}\sin(kwx)\sin(nwx)dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq k,\\ \frac{T}{2}, & \text{si } n = k.\end{cases}$$

$$\int_a^{a+T}\sin(nwx)\cos(kwx)dx = 0.$$

On déduit alors, pour tout $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} S(x)cos(nwx)dx = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(x)cos(nwx)dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} S(x)sin(nwx)dx = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(x)sin(nwx)dx.$$

4.3 Dévloppemet en série de Fourier

Définition 4.2. *On appelle série de Fourier associée à f, la série trigonométrique*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nwx) + b_n\sin(nwx),$$

où

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx,$$

pour tout $n \geq 1$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)cos(nwx)dx = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)cos(nwx)dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(x)sin(nwx)dx = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)sin(nwx)dx.$$

Remarque 4.1. *Si f est paire, on a*

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)dx, \\ pour\ tout\ n \geq 1, a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(nwx)dx, \\ pour\ tout\ n \geq 1, b_n = 0. \end{cases}$$

Si f est impaire, on a

$$\begin{cases} pour\ tout\ n \geq 1, a_n = 0, \\ pour\ tout\ n \geq 1, b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(nwx)dx. \end{cases}$$

En particulier, si f est 2π périodique, alors *si f est paire, on a*

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx, \\ \textit{pour tout } n \geq 1, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx, \\ \textit{pour tout } n \geq 1, b_n = 0. \end{cases}$$

Si f est impaire, on a

$$\begin{cases} \textit{pour tout } n \geq 0, a_n = 0, \\ \textit{pour tout } n \geq 1, b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx. \end{cases}$$

4.4 Série de Fourier complexe

Soit f une fonction periodique déveloper en série de Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx))$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $w > 0$ et $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$

d'après les relations d'Euler

$$\cos(nwx) = \frac{e^{inwx} + e^{-inwx}}{2},$$

$$\sin(nwx) = \frac{e^{inwx} - e^{-inwx}}{2i},$$

on obtient

$$f(x) = a_0 + \sum \left(a_n \frac{e^{inwx} + e^{-inwx}}{2} + b_n \frac{e^{inwx} - e^{-inwx}}{2i} \right)$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum \left(e^{inwx} \frac{a_n - ib_n}{2} + e^{-inwx} \frac{a_n + ib_n}{2} \right).$$

On pose

$$\begin{cases} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \\ c_0 = \frac{a_0}{2}. \end{cases}$$

On obtient

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n e^{inwx} + c_{-n} e^{-inwx}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inwx},$$

cette dernière série est la forme complexe d'une série trigonométrique. Les coefficients c_n et c_{-n} peuvent être exprimer par des intégrales, en effet, pour $n \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(x) \left[\cos(nwx) - i \sin(nwx) \right] dx \\ &= \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x) e^{-inwx} dx. \end{aligned}$$

De la même manière, on a

$$c_{-n} = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)e^{inwx}dx.$$

Remarque 4.2. *Si f possède une dérivée f' intégrable sur $[0, 2\pi]$, alors*

$$c_n(f') = inc_n(f),$$

en effet
$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt$*, une intégration par parties donne*
$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}[f(t)e^{-int}]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi}int_0^{2\pi}[f(t)e^{-int}dt = inc_n(f).$

Plus généralement, étant donné une application périodique de période 2π et intégrable sur $[0, 2\pi]$, quelles sont les conditions qui assurent la convergence de la série de Fourier, associée à cette fonction, dans quel sens, retrouve-t-on f comme limite ? Le théorème de Dirichlet répond à cette question, en utilisant la notion de fonction de classe C^1 par morceaux.

Définition 4.3. *f est dite de classe C^1 par morceaux sur l'intervalle $I = [a, b]$ si les conditions suivantes sont satisfaites.*

- *i) f est continue et continûment dérivable en tout point de I sauf en un nombre fini de points (t_i) de I.*
- *ii) En tout point t_i, $(t_i \neq a ett_i \neq b)$, $f(t_i)_+$ et $f(t_i)_-$ existent dans $\mathbb{R}$, de plus $f(a)+$ et $f(b)_-$ existent $(f(x) + etf(x)-$ sont respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x).*

iii) En tout point t_i, ($t_i \neq a et t_i \neq b$), $f'(t_i)_+$ et $f'(t_i)_-$ existent dans $\mathbb{R}$, de plus $f'(a)_+$ et $f'(b)_-$ existent ($f'(x)_+$ et $f'(x)_-$ sont respectivement les dérivées à droite et à gauche de f au point x).

Plus généralement si f est définie sur $\mathbb{R}$, on dit que f est de classe C^1 par morceaux, si sa restriction à tout intervalle compact est de classe C^1 par morceaux. Si de plus f est périodique de période 2π alors f est de classe C^1 par morceaux sur tout intervalle de longueur 2π.

Proposition 4.1. *(Théorème de Dirichlet) Si f est périodique, de période 2π et si f est de classe C^1 par morceaux sur R, alors la série de Fourier associée à f est convergente sur R et on a*

$$\forall t \in R, \frac{1}{2}[f(t)_- + f(t)_+] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

En particulier si f est continue au point t, alors

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Cas général : période T L'étude d'une application périodique de Période T, se ramène à l'étude d'une application de période 2π, en effet soit f une application périodique, de période T et soit g définie par $g(t) = f(\frac{t}{w})$ où $w = \frac{2\pi}{T}$ alors g est périodique de période 2π. La série de Fourier associée à g est

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

et la série associée à f est

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nwt + b_n \sin nwt).$$

où

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} g(t)dt = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} g(t)cos(nt)dt = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)cos(nwt)dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+T} g(t)sin(nt)dt = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} g(t)sin(nwt)dt.$$

En particulier le théorème de Dirichlet est toujours valable, c'est à dire si f est périodique, de période T, et si f est de classe C^1 par morceaux alors

$$\frac{1}{2}[f(t)_- + f(t)_+] = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nwt + b_n \sin nwt).$$

4.5 Égalité de Parseval

Théorème 4.1. *Soit f une application périodique de période T, telle que*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nwx) + b_n \sin(nwx),$$

alors l'égalité de Parseval est

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f^2(x)dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

4.6 Transformée de Fourier

Définition 4.4. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ on appelle transformée de Fourier de la fonction f la fonction $\hat{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itx} d\lambda(t),$$

$x \in \mathbb{R}$. Certains auteurs définissent la transformée de Fourier de f par

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi itx} dt,$$

cette intégrale a un sens car $|f(x)e^{-itx}| = |f(x)|$ d'où

$$|\hat{f}(t)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx} dx| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)e^{-itx}| dx < \infty.$$

Exemple 4.1. *Calculons la transformée de Fourier de*

$$f(x) = e^{-a|x|}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(it-a)x}dx \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(it-a)x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a-it} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+it} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2a}{a^2+t^2} \right)
\end{aligned}
$$

Propriétés

Proposition 4.2. *1) Soient f et g deux fonctions admettant une transformée de Fourier. Alors, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,*

$$\alpha \hat{f}(t) + \beta \hat{g}(t)$$

est la transformée de Fourier de

$$\alpha f(t) + \beta g(t).$$

2) Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $f(\lambda t)$ admet également une transformée de Fourier telle que

$$\hat{f}(\lambda t) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}(\frac{t}{\lambda}).$$

3) Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier. pour toute $\tau \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x - \tau)$, alors g admet également une transformée de Fourier et

$$\hat{g}(t) = e^{-i\tau t}\hat{f}(t).$$

4) Soit f une fonction admettant une transformée de Fourier. Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f_a(t) = e^{iat}f(t)$$

admet également une transformée de Fourier et

$$\hat{f}_a(t) = \hat{f}(t - a).$$

Preuve 4.1. *1) Posons $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$, alors*

$$\begin{aligned}
\hat{h}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \alpha f(x)e^{-itx}dx \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \beta g(x)e^{-itx}dx \\
&= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}dx \\
&+ \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-itx}dx \\
&= \alpha\hat{f}(t) + \beta\hat{g}(t).
\end{aligned}$$

2) Supposons que $\lambda \neq 0$ et posons $s = \lambda t$, alors

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\lambda t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\lambda x) e^{-itx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(s) e^{\frac{-isx}{\lambda}} \frac{1}{|\lambda|} ds \\
&= \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}(\frac{t}{\lambda})
\end{aligned}$$

3) Par le changement de variable suivant , on trouve

$$\begin{aligned}
\hat{g}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-itx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x-\tau) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it(x+\tau)} f(x) dx \\
&= e^{-it\tau} \hat{f}(t).
\end{aligned}$$

4) On a

$$\begin{aligned}
\hat{f}_a(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{iax} f(x) e^{-itx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(t-a)x} f(x) dx \\
&= \hat{f}(t-a).
\end{aligned}$$

4.7 Transformée de Fourier d'une dérivée

Proposition 4.3. *Soit f une fonction continue par morceaux, admettant une transformée de Fourier. Supposons de plus que $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, alors la dérivée f' de f admet une transformée et*

$$\hat{f}'(x) = ix\hat{f}(x).$$

Preuve 4.2. *Comme f' est continue, par une intégration par parties, on obtient le résultat voulu.*

4.8 Inversion de la transformée de Fourier

4.8.1 Formule d'inversion

Définition 4.5. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Fourier inverse de f la fonction définit pour tout w de $\mathbb{R}$ par*

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(x))(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{xt} \hat{f}(x) dx.$$

Théorème 4.2. *Soit f une fonction absolument intégrable et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors l'intégrale de Fourier $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) e^{(-iwt)x} dt$ converge pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et*

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) e^{(iwt)} dw = \frac{f(t)_- + f(t)_+}{2}.$$

En particulier, si f est continue en t, alors

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) e^{(2i\pi wt)x} dw.$$

4.8.2 Conséquence de la formule d'inversion

Corollaire 4.1. *Soient f et g deux fonctions intégrables et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.*
Si $\hat{f}(w) = \hat{g}(w)$ pour tout w de $\mathbb{R}$ alors $f = g$ en tout points t où f et g sont continues.

Preuve 4.3. *Soit t un point où f et g sont toutes deux continues. Puisque $\hat{f}(w) = \hat{g}(w)$, il s'ensuit par la formule d'inversion que*

$$\begin{aligned} f(t) &= \tfrac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(w) e^{(2i\pi wt)x} dw \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(w) e^{(2i\pi wt)x} dw \\ &= g(t). \end{aligned}$$

4.9 Exercices

Exercice 4.1. *Soit f l'application périodique, de période 2π définie sur $[-\pi, \pi]$ par*

$$f(x) = |x|$$

1. *Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.*

2. *Calculer les coefficients de Fourier associée à f.*

3. *Écrire la série de Fourier de f et étudier sa convergence.*

4. *Déduire les sommes suivantes :* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$. *et* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Exercice 4.2. *Soit f l'application périodique, de période 2π définie par*

$$f(x) = x^2$$

si $|x| \leq \pi$.

1. *Tracer le graphe de f sur* $[-4\pi, 4\pi]$.

2. *Déterminer la série de Fourier de f.*

3. *Calculer* $\int_{[-\pi,\pi]} x^4 dx$ *et déduire la valeur de* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

4. *Montrer que*
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$$
et déduire $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *et* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 4.3. *Soit $a \in \mathbb{R}^*$, calculer les coefficients de Fourier réles de la fonction périodique et continue par morceaux définie ci dessus*

$$f_a(x) = \exp(ax)$$

sur $[0, 2\pi[$.

Exercice 4.4. *Soit f l'application périodique, de période 2π définie sur*

$[-\pi, \pi]$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & si\ 0 \leq x \leq \pi, \\ \\ \pi + x, & si - \pi \leq x < 0. \end{cases}$$

1. *Tracer le graphe de* f *sur* $[-3\pi, 3\pi]$.
2. *Calculer les coefficients de Fourier associée à* f.
3. *Écrire la série de Fourier de* f *et étudier sa convergence.*
4. *Calculer la somme suivante :* $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
5. *Montrer que* $\sum_{n\geq 1} a_n^2 = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 4.5. *Soit* f *l'application périodique, de période* π *définie sur* $[0, \pi[$ *par*

$$f(x) = 1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2.$$

1. *Tracer le graphe de* f *sur* $[-2\pi, 2\pi]$.
2. *Calculer les coefficients de Fourier associée à* f.
3. *Écrire la série de Fourier de* f *et étudier sa convergence.*
4. *Calculer les sommes suivantes :* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ *et* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice 4.6. *Soit* f *une fonction périodique de période* $T = 2$, *telle que :*

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ x \in [0, 1[, \\ \frac{1}{2} & si\ x \in [1, 2[. \end{cases}$$

1. *Dessiner le graphe de* f *sur l'intervalle* $[-4, 4[$.

2. *Calculer les coefficients de Fourier de f.*

3. *Étudier la convergence de la série de Fourier sur l'intervalle $[0, 2[$.*

4. *En déduire la somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.*

Exercice 4.7. *On se donne une fonction périodique de période 2π définie sur $[-\pi, \pi]$ comme suit*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & si\ 0 \leq x \leq \pi, \\ x, & si - \pi \leq x < 0. \end{cases}$$

1. *Tracer le graphe de f sur $[-4\pi, 4\pi]$.*

2. *Calculer les coefficients de Fourier associée à f.*

3. *Écrire la série de Fourier de f et étudier sa convergence.*

4. *Calculer la somme suivante : $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.*

5. *Montrer que $\sum_{n \geq 1} a_n^2 = \frac{\pi^2}{6}$.*

Exercice 4.8. *Soit f l'application périodique, de période π définie sur $[0, \pi[$ par*

$$f(x) = 1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2.$$

1. *Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.*

2. *Calculer les coefficients de Fourier associée à f.*

3. *Écrire la série de Fourier de f et étudier sa convergence.*

4. *Calculer les sommes suivantes : $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$.*

Bibliographie

J. P. Ansel et Y. Ducel. Exercices corrigés en théorie de la mesure et de l'intégration. 1995. Ellipses.

P. Benichou et autres. Séries de Fourier. Transformations de Laplace. 1995. Ellipses.

A. Bouziad et J. Calbrix. Théorie de la mesure et de l'intégration. 1993. Publications de l'université de Rouen.

A. Gramain. Intégration. 1988. Hermann.

D. Revuz. Mesure et intégration. 1994. Hermann.